Esercizi su estremi liberi

Esercizio 1. Classificare i punti stazionari di

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Svolgimento. Osserviamo che $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$, e che $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)$, quindi troviamo i punti di stazionari risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y^9 \\ x = y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(y^8 - 1) = 0 \\ x = y^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ o } y = -1 \text{ o } y = 1 \\ x = y^3 \end{cases}$$

quindi f ha tre punti stazionari: $O = (0,0)$, $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (-1,-1)$. Ora osserviamo che $f(x,y) = f(-x,-y)$, quindi i punti P_1 e P_2 hanno la stessa natura ed è sufficiente classificare solo uno dei due, per esempio P_1. La matrice hessiana di f è

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x & -4 \\ -4 & 12y \end{bmatrix}$$

Quindi

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H(1,1)) = 128 > 0$$

ne concludiamo che $P_1 = (1,1)$ è un punto di minimo relativo per f (e così è $P_2 = (-1,-1)$ per simmetria). Si vede che $\det(H(0,0)) = -16 < 0$, quindi il test dell'hessiana da' immediatamente che $(0,0)$ è un punto di sella. Lo verifichiamo anche in un altro modo, studiando il segno di

$$f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - 4xy - 0 = x^4 + y^4 - 4xy \qquad \text{nell'intorno di } (0,0).$$

Osserviamo che

$$f(x,0) = x^4 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(0,y) = y^4 \quad \forall\, y \in \mathbb{R},$$

mentre

$$f(x,x) = 2x^4 - 4x^2 = x^2(2x^2 - 4) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\sqrt{2} \;\text{ o }\; x \geq \sqrt{2}.$$

Concludiamo che

$$f(x,x) \leq 0 \;\; \forall\, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

Quindi per ogni disco centrato in $(0,0)$ raggio r sufficientemente piccolo ($r \leq \sqrt{2}$) troviamo dei punti (x,y) in cui $f(x,y) \geq f(0,0) = 0$ e dei punti (x',y') in cui $f(x',y') \leq f(0,0) = 0$. Ne consegue che $(0,0)$ è un punto di sella.

Esercizio 2. Classificare i punti stazionari di

$$f(x,y) = x^3y - 7xy \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Svolgimento. Osserviamo che $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, e che $\nabla f(x,y) = (3x^2y - 7y, x^3 - 7x)$, quindi troviamo i punti di stazionari risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x^2y - 7y = 0 \\ x^3 - 7x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(3x^2 - 7) = 0 \\ x(x^2 - 7) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \;\text{ o }\; x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}, \\ x = 0 \;\text{ o }\; y = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

quindi f ha tre punti stazionari: $O = (0,0)$, $P_1 = (\sqrt{7}, 0)$, $P_2 = (-\sqrt{7}, 0)$. Ora osserviamo che $f(x,y) = f(-x,-y)$, quindi i punti P_1 e P_2 hanno la stessa natura ed è sufficiente classificare solo uno dei due, per esempio P_1. Si noti che $f(O) = f(P_1) = f(P_2) = 0$. Conviene quindi studiare preliminarmente il segno di

$$f(x,y) - f(O) = f(x,y) - f(P_1) = f(x,y) = y(x^3 - 7x).$$

Concludiamo che

$$f(x,y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 - 7x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^3 - 7x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

e $f(x,y) \leq 0$ nel complementare. Esplicitando le suesposte disuguaglianze, con un semplice ragionamento grafico si vede immediatamente che tutti e tre i punti O, P_1 e P_2 sono di sella.

Esercizio 3. Studiare i punti di massimo e minimo locale di

$$f(x,y) = |xy|(7x + 7y - 1)$$

ristretta agli insiemi

$$A^+ = (0,+\infty) \times (0,+\infty),$$
$$A^- = (0,+\infty) \times (-\infty,0).$$

Svolgimento. Consideriamo innanzitutto la restrizione di f ad A^+: si ha

(1) $$f(x,y) = xy(7x + 7y - 1) = 7x^2y + 7xy^2 - xy \quad \forall\,(x,y) \in A^+$$

quindi $\nabla f(x,y) = (14xy + 7y^2 - y, 7x^2 + 14xy - x)$ per ogni $(x,y) \in A^+$, quindi troviamo i punti di stazionari risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} 14xy + 7y^2 - y = 0 \\ 7x^2 + 14xy - x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(14x + 7y - 1) = 0 \\ x(7x + 14y - 1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \;\text{ o }\; 14x + 7y - 1 = 0, \\ x = 0 \;\text{ o }\; 7x + 14y - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 14x + 7y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 7x + 14y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 14x + 7y - 1 = 0 \\ 7x + 14y - 1 = 0 \end{cases}$$

quindi f ha quattro punti stazionari: $O = (0,0)$, $P_1 = (\frac{1}{7}, 0)$, $P_2 = (0, \frac{1}{7})$, e $P_3 = (\frac{1}{21}, \frac{1}{21})$. Osservo che i primi tre punti non appartengono ad A^+. Classifico il punto P_3 usando che la matrice hessiana di f è

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 14y & 14x + 14y - 1 \\ 14x + 14y - 1 & 14x \end{bmatrix}.$$

In particolare,

$$H\left(\frac{1}{21}, \frac{1}{21}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

che ha determinante strettamente positivo. Concludiamo che $\left(\frac{1}{21}, \frac{1}{21}\right)$ è un punto di minimo locale per f su A^+.

Osserviamo che

$$f(x,y) = -xy(7x + 7y - 1) \quad \forall\,(x,y) \in A^-.$$

Quindi la f ristretta ad A^- ha gradiente $-(14xy + 7y^2 - y, 7x^2 + 14xy - x)$ e quindi ha gli stessi punti stazionari di (1). I punti $O = (0,0)$, $P_1 = (\frac{1}{7}, 0)$, $P_2 = (0, \frac{1}{7})$, e $P_3 = (\frac{1}{21}, \frac{1}{21})$ non appartengono ad A^-, quindi deduciamo che f non ha punti stazionari (e quindi neppure punti di estremo) in A^-.

Esercizio 4. Classificare i punti stazionari di

$$f(x,y) = x^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{48}{x} + \frac{8}{y} \qquad \forall\,(x,y) \in \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0,\ y \neq 0\big\}\ .$$

Svolgimento. Osserviamo che

$$f(x,y) = g(x) + h(y), \quad \text{con} \quad g(x) = x^3 + \frac{48}{x}, \quad h(y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{8}{y}\,.$$

Troviamo i punti di stazionari risolvendo il seguente sistema (nell'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\} \setminus \{y=0\}$)

$$\begin{cases} g'(x) = 3x^2 - \frac{48}{x^2} = 0, \\ h'(y) = y - \frac{8}{y^2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x^4 - 48 = 0 \\ y^3 - 8 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

da cui concludiamo che i punti stazionari sono $P_1 = (2,2)$ e $P_2 = (-2,2)$. Li classifico sfruttando il fatto che f è data dalla somma di una funzione della sola x e di una funzione della sola y. Si vede facilmente che

$$\begin{cases} x = 2 \ \text{ è un punto di minimo relativo per } g \\ x = -2 \ \text{ è un punto di massimo relativo per } g \end{cases}$$

mentre

$$y = 2 \ \text{ è un punto di minimo relativo per } h.$$

Concludiamo che $P_1 = (2,2)$ è un punto di minimo relativo per f, mentre $P_2 = (-2,2)$ è un punto di sella per f.

Esercizio 5. Classificare i punti stazionari di

$$f(x,y) = 7xy^2(y-x) + 3 \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Svolgimento. Osserviamo che $\nabla f(x,y) = (7y^3 - 14xy^2, 21xy^2 - 14x^2y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, quindi troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 7y^3 - 14xy^2 = 0 \\ 21xy^2 - 14x^2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y^2(7y - 14x) = 0 \\ xy(21y - 14x) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \text{ o } y = 2x \\ x = 0 \text{ o } y = 0 \text{ o } 3y = 2x\,, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \forall\,x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = 2x \\ 3y = 2x. \end{cases}$$

Allora i punti dell'asse delle x sono <u>tutti e soli i punti stazionari</u>. Notiamo che $f(x,0) = 3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi, per classificare la natura di tali punti, possiamo studiare il segno di

$$f(x,y) - f(x,0) = 7xy^2(y-x)$$

Si vede che

$$7xy^2(y-x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq x \end{cases}$$

e $f(x,y) - f(x,0) \leq 0$ nel complementare. Con un ragionamento grafico, si conclude che $(0,0)$ è un punto di sella, e che per ogni $x \neq 0$ il punto $(x,0)$ è di massimo relativo per f.

Esercizio 6. Classificare i punti stazionari di

$$f(x,y) = \sin(x)e^{\cos(y)} \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Svolgimento. Ricerco i punti stazionari risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \cos(x)e^{\cos(y)} = 0 \\ -\sin(x)\sin(y)e^{\cos(y)} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \sin(x)\sin(y) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \sin(y) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y = h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Osservo che

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, h\pi\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) e^{\cos(h\pi)} \\ &= (-1)^k e^{(-1)^h} \\ &= \begin{cases} e & \text{se } k,\, h \text{ pari} \\ -e & \text{se } k \text{ dispari, } h \text{ pari} \\ \frac{1}{e} & \text{se } k \text{ pari, } h \text{ dispari} \\ -\frac{1}{e} & \text{se } k,\, h \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre notiamo che

$$|f(x,y)| = |\sin(x)|e^{\cos(y)} \le e^{\cos(y)} \le e \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

quindi

$$-e \le f(x,y) \le e \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

quindi

$$\begin{cases} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, h\pi\right),\; k,\, h \text{ pari} \;\Rightarrow & \text{sono punti di massimo ASSOLUTO} \\ k \text{ dispari, } h \text{ pari} \;\Rightarrow & \text{sono punti di minimo ASSOLUTO} \end{cases}$$

Rimangono da classificare i punti

$$\begin{cases} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, h\pi\right), & k \text{ pari, } h \text{ dispari} \\ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, h\pi\right), & k,\, h \text{ dispari} \end{cases}$$

Calcolo la matrice hessiana

$$H\,(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin(x)e^{\cos(y)} & -\sin(y)\cos(x)e^{\cos(y)} \\ -\sin(y)\cos(x)e^{\cos(y)} & -\sin(x)\cos(y)e^{\cos(y)} + \sin(x)\sin^2(y)e^{\cos(y)} \end{bmatrix}.$$

Concludo che

$$\begin{cases} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, h\pi\right),\; k \text{ pari, } h \text{ dispari} \;\Rightarrow & \text{è un punto di SELLA} \\ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, h\pi\right),\; k,\, h \text{ dispari} \;\Rightarrow & \text{è un punto di SELLA.} \end{cases} \tag{2}$$

Esercizio assegnato. Ritrovare il risultato (2) ragionando sul segno di

$$f(x,y) - f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, h\pi\right) = \sin(x)e^{\cos(y)} - \frac{1}{e} \quad \text{nell'intorno di } \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, h\pi\right), \text{ con } k \text{ pari e } h \text{ dispari,}$$

e sul segno di

$$f(x,y) - f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, h\pi\right) = \sin(x)e^{\cos(y)} + \frac{1}{e} \quad \text{nell'intorno di } \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, h\pi\right), \text{ con } k \text{ dispari e } h \text{ dispari.}$$
